Flipped Teaching aplicado al estudio de los métodos elementales de integración aproximada. Una experiencia educativa.

Vidal Meló, Anna[1]; Estruch Fuster, Vicente D.[2]; Boigues Planes, Francisco J.[3]

Universitat Politècnica de València-Campus de Gandia

RESUMEN

El Flipped Teaching es una metodología docente que supone cambiar la estructura tradicional del aprendizaje, de forma que los elementos tradicionales de la clase y las correspondientes tareas se invierten en el orden de su ejecución temporal. En este trabajo se describe el proceso seguido para invertir una práctica docente dedicada al estudio de los métodos elementales de integración aproximada, que se ha desarrollado durante los cursos 2015-2016 y 2016-2017 en la asignatura Matemáticas 2 de primer curso, del Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación, Sonido e Imagen de la Universitat Politècnica de València (UPV). Entre los recursos utilizados destaca la herramienta Lessons de la plataforma Poliformat de la UPV, que ha permitido crear itinerarios formativos interactivos. La sesión presencial se ha dedicado a la realización de un trabajo colaborativo, entre grupos, relacionado con la resolución de un problema de Fermi, consistente en la estimación del volumen de varios relieves como el Monte Mayón, el Mondúver y el Puig Campana. En este trabajo se exponen la metodología, los recursos utilizados, el desarrollo de la sesión presencial y los resultados obtenidos para el problema de Fermi.

PALABRAS CLAVE: Flipped Teaching, integración aproximada, trabajo colaborativo.

1. INTRODUCCIÓN

En 2007, Jonathan Bergmann y Aaron Sams, profesores de química de la Woodland Park High School, invirtieron el modelo de enseñanza tradicional, exigiendo a sus estudiantes ver un vídeo y tomar notas del mismo como tarea en casa, previa a la clase, lo que propició disponer de más tiempo en las clases presenciales para poner en práctica los conocimientos adquiridos, resolver dudas y realizar proyectos o experimentos. Son los inicios de lo que ha venido a denominarse clase al revés, aula invertida o Flipped Teaching. No hay una única forma de poner en práctica esta metodología en educación universitaria, aunque, a grandes rasgos, se trata de proporcionar al alumno material (videos cortos, documentación, screencast, etc.), que los estudiantes trabajan autónomamente antes de la clase, dedicándose el tiempo de clase presencial a ejercicios, proyectos y discusiones. El aula invertida busca despertar actitudes que involucran al alumno positivamente frente a la asignatura, fundamentalmente el aprendizaje activo y el compromiso personal. La clase invertida permite aprovechar mejor el tiempo de clase presencial que se convierte en un "taller de experiencias", donde los estudiantes pueden recibir feedback por parte del profesor o de los compañeros, evaluar las propias habilidades, aplicar conocimientos y habilidades, adquiridos previamente, e interactuar mediante actividades en grupo. Muchos estudios abordan el tema de los resultados de aplicar la metodología del aula invertida y coinciden en señalar una mejora en el rendimiento académico y en la adquisición de competencias (Bergamnn y Sams, 2105), (Talbert 2012a, 2112b, 2014), (Moravec, Williams, Aguilar-Roca y O'Dowd, 2010), (Gannod, Burge y Helmick, 2008) y (Fidalgo, Martinez, Borras y Sanchez, 2016). Pero en la puesta en práctica de esta metodología, además de un buen diseño de la tarea previa a la clase, son muy importantes las actividades que los alumnos realizan en el aula. El Flipped Teaching ha permitido invertir las prácticas de nuestra asignatura y dedicar la sesión presencial a la realización de un trabajo colaborativo, en y entre grupos, para la resolución de un problema de estimación de grandes magnitudes (Albarracín y Gorgorió, 2011) o problema de Fermi, en el que se estiman grandes cantidades o magnitudes. Los problemas de Fermi se llaman así en honor al físico, y Premio Nobel de Física en 1938, Enrico Fermi (1901-1954) que solía plantearlos a sus estudiantes de la Universidad de Chicago. Un problema de Fermi clásico trata de obtener el número de afinadores de piano que hay en Chicago (Efthimiou y Llewellyn, 2007). A grandes rasgos un problema de Fermi trata sobre magnitudes que parecen imposibles de calcular pero de las cuáles se pueden obtener valores aproximados, es decir, estimaciones. Albarracín y Gorgorió (2013) consideran diversas definiciones aportadas por autores como Ärlebäack (2009), Carlson (1997) o Efthimiou y Llewellyn (2007) y añaden además que estos problemas aceptan una aproximación alternativa a su solución a base de romper el problema en partes más pequeñas y resolverlas por separado. García (2013) entre sugerencias generales para la resolución de este tipo de problemas, plantea la descomposición del problema en partes más fáciles de resolver, encontrar un límite superior y otro inferior para la solución, que sería la media geométrica de los extremos. Empresas como Apple, Google, Facebook o Amazon, también utilizan cuestiones de Fermi en la selección de personal (Poundstone, 2007, 2012) con preguntas como ¿cuántas pelotas de golf caben en un autobús escolar?. Uno de los asesores del MIT en una entrevista de selección de personal preguntó cuánto se tardaría en hacer desaparecer una montaña como el Fujiyama (Paulos, 2000).

En este trabajo se describe el material utilizado para invertir la clase dedicada a la integración aproximada, en la asignatura anual Matemáticas 2, de primer curso del Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación, Sonido e Imagen (GISTSI), de la Universitat Politècnica de València (UPV). Uno de los recursos utilizados es la plataforma de teleformación de la UPV o aula virtual PoliformaT, y especialmente una de sus herramientas, Lessons, que permite crear itinerarios formativos interactivos de fácil edición en tiempo real y perfecta integración con el resto de herramientas de PoliformaT (exámenes, tareas, etc.). En los cursos 2015-2016 y 2016-2017, con la inversión de la clase, se pide a los estudiantes que estudien previamente, en horario no presencial, la parte teórica que se presenta en un elemento de Lessons creado para tal efecto. Dicho elemento tiene un importante contenido multimedia que incluye varios vídeos, creados específicamente. Además de los recursos creados y utilizados, también exponemos la metodología, la planificación y el desarrollo de la sesión presencial en la que el alumnado realiza un trabajo colaborativo utilizando el programa Matlab©, consistente en estimar el volumen de varios relieves (Figuras 1) como son el Monte Mayón (Filipinas), el Mondúver y el Puig Campana (Comunitat Valenciana), problemas similares al citado de Paulos (2000). A partir de los cálculos realizados por cada uno de los grupos, se pudieron obtener las estimaciones requeridas.

Figura 1a. Monte Mayón
De Tomas Tam, Attribution, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8832333

Figura 1b. Puig Campana
De Diego Delso, CC BY-SA4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=35213493

Figura 1c. Mondúver
De Joanbanjo - Trabajo propio, CC BY-SA3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=26954601

2. OBJETIVOS

Esta experiencia educativa tiene como objetivo fundamental conocer y aplicar los métodos elementales de integración aproximada y facilitar la adquisición de competencias como el autoaprendizaje y el trabajo en grupo. Para ello se realiza una práctica en aula informática, de dos horas de duración, después de finalizar el estudio de la integral definida y sus aplicaciones en clases de teoría. Al finalizar la actividad Flip propuesta, el alumnado será capaz de: Distinguir los métodos básicos de integración aproximada (rectángulos, trapecios y Simpson), especificar los procesos que permiten obtener valores aproximados de integrales definidas con dichos métodos, calcular valores aproximados de una integral definida a través a través de los métodos básicos de integración aproximada y, finalmente, obtener aproximaciones de integrales definidas utilizando la orden `trapz` de Matlab

3. MÉTODO

A continuación, se describe el proceso seguido para la realización de la práctica mediante Flipped Teaching, especificando los recursos creados, el diseño de la actividad Flip asociada (tareas de aprendizaje para realizar en casa y actividades a realizar en clase), y la metodología seguida en clase.

3.1. Recursos

Inicialmente se realizó una búsqueda de posibles vídeos como material inicial para preparar en casa, pero finalmente se decidió realizar dos vídeos de corta duración o Polimedia. El primero de ellos, *Una introducción al cálculo aproximado de integrales definidas*, disponible en:

https://polimedia.upv.es/visor/?id=544ae458-7829-1246-b1ae-9875c3155ed8 ,

tenía como objetivos distinguir los diferentes métodos básicos de integración aproximada y describir los procesos que permiten obtener valores aproximados de integrales definidas con dichos métodos. El segundo, *Ejemplos de integración aproximada con Matlab*, está disponible en

https://polimedia.upv.es/visor/?id=0b1ebe33-a4b6-e944-b82d-2ccd70a49aa0 ,

y sus objetivos son calcular valores aproximados de integrales definidas mediante los métodos de rectángulos, trapecios y Simpson, utilizando Matlab; utilizando el comando `trapz( )` de Matlab para calcular valores aproximados de una integral definida, tanto si se conoce el integrando como si sólo se conoce un conjunto finito de valores.

Estos vídeos se incorporaron a un Lessons que puede verse en la Figura 2. Por otro lado, para poder comprobar qué estudiantes se han preparado el material y evaluar el grado de comprensión de éste, se preparó un examen tipo test en la misma plataforma PoliformaT, accesible desde un enlace al final del Lessons.

En el diseño y planificación de la clase presencial se estableció la realización de un trabajo en grupo en el que aplicar lo aprendido a dos problemas. El primer problema se dedica a los métodos de cálculo de la longitud de una curva y el segundo es un problema de Fermi, ya descrito, donde utilizar el método de los trapecios con Matlab. Posteriormente se creó una Tarea en Poliformat, con un documento informativo acerca del trabajo a realizar (Figura 3), y un documento plantilla con la memoria a entregar al final de la sesión. Aunque para el primero de los ejercicios a resolver no se requiere material extra, para la resolución del problema de Fermi se necesita conocer las áreas de algunas secciones transversales del relieve o curvas de nivel. Recurriendo a Google Maps obtuvimos mapas topográficos correspondientes a los tres relieves citados. Sobre el mapa topográfico se resaltaron con rotulador las curvas de nivel con las que trabajar y se hicieron fotocopias, tamaño A3, para cada uno de los grupos.

Diseño de la actividad Flip

El diseño establecido consta de las siguientes fases:

No presencial:

- **Paso 1:** El alumnado debe, previamente a la realización de la sesión de prácticas, hacer un estudio de la unidad a través de un Lessons (1 hora).
- **Paso 2:** El alumnado debe realizar un examen tipo test en PoliformaT, disponible hasta el día antes de la realización de la práctica (30').

Presencial:

-En la sesión presencial el alumnado pregunta dudas y el profesor comenta los resultados del test, dando feedback (20’) (la herramienta Estadísticas de Poliformat resulta muy útil en este caso).

Realización del trabajo en grupo de dos alumnos, relacionado con el Lessons estudiado, adjuntando finalmente el resultado en un documento maquetado o memoria, disponible en Tareas de PoliformaT (1h 40’).

Figura 2. Lessons creado para el estudio de los métodos de integración aproximada

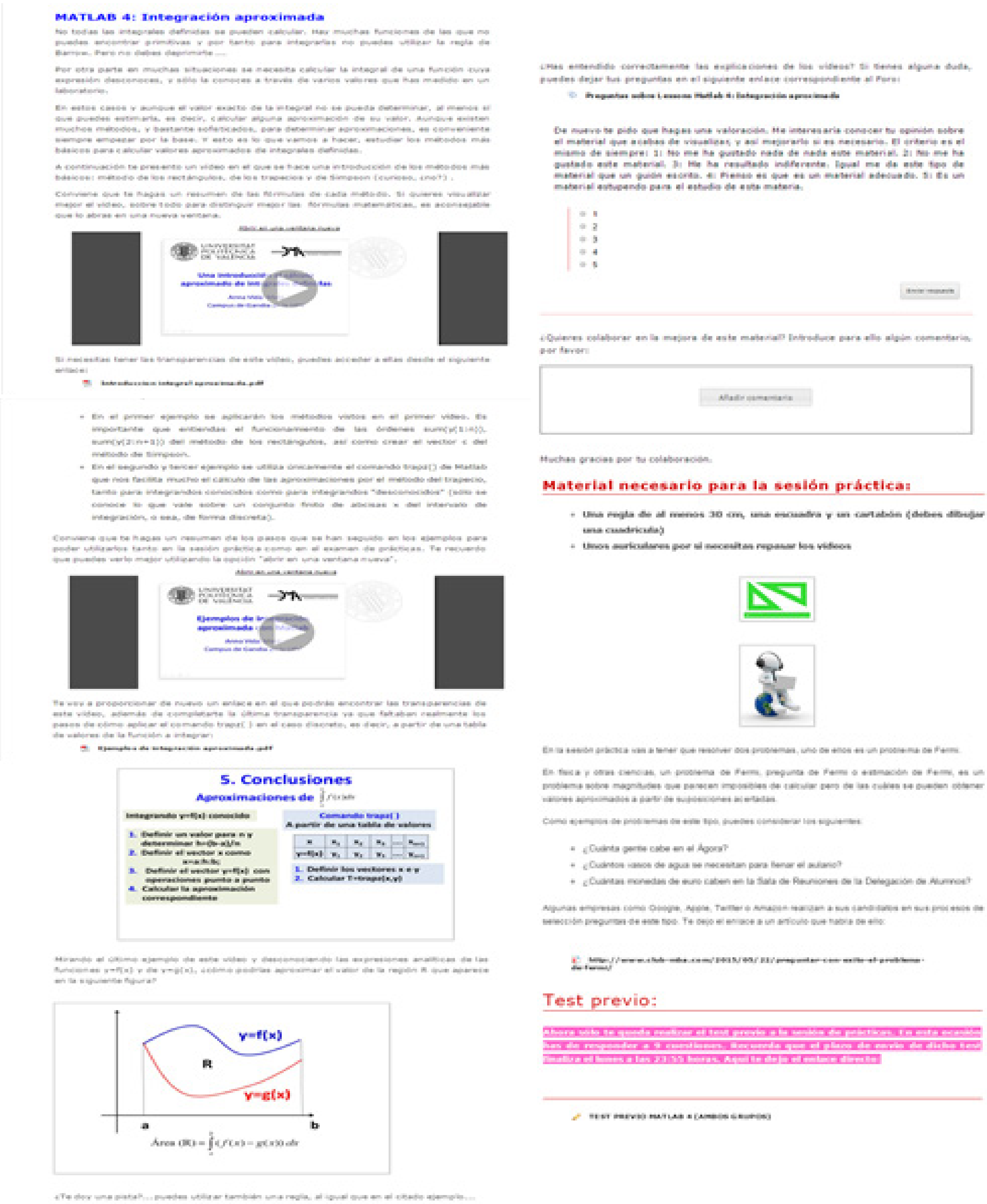
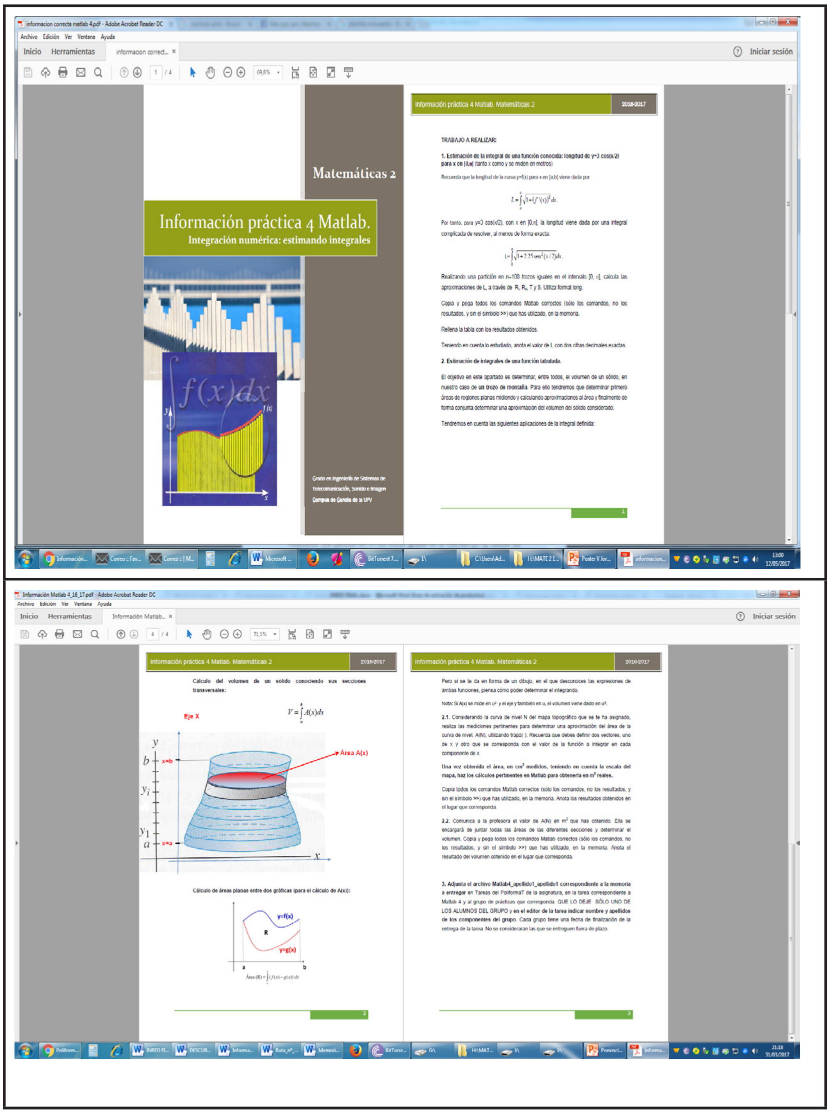


Figura 3. Documento informativo del trabajo a realizar



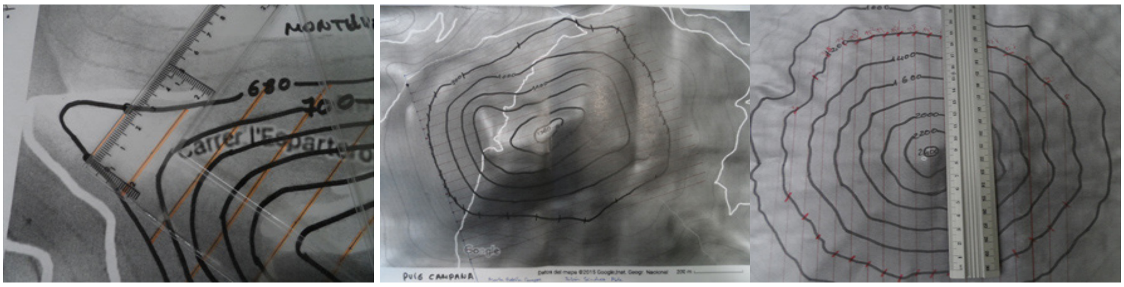
3.2 Metodología y desarrollo de la clase presencial: trabajo colaborativo en grupo

La clase presencial se inicia con el control de asistencia durante el cual el profesor comprueba la realización previa del examen requerido. A continuación, se pasa a la fase de feedback del examen, y a comentar la valoración del Lessons en cuanto a la calidad del material disponible. Un 38% del alumnado opinó que el material fue adecuado y un 62% que era estupendo para el estudio de la materia.

Posteriormente, se forman grupos de dos estudiantes. El alumnado dispone, en Tareas/Poliformat, de un documento con instrucciones. Después del primer ejercicio, consistente en determinar la longitud de un arco de curva aplicando cada uno de los métodos de integración numérica estudiados, se proporciona los grupos un mapa topográfico junto con el detalle de la curva o curvas a nivel a considerar y la partición a tener en cuenta a para hacer las mediciones, de forma que cada grupo realizara entre 21 y 26 medidas. Estableciendo la partición indicada sobre la región que encierra cada curva de nivel *N*, y midiendo su amplitud en cada punto de la partición establecida, cada grupo pasa a calcular una estimación, utilizando el método de los trapecios a través del comando trapz de Matlab, del valor del área de la sección transversal correspondiente a dicha curva de nivel, es decir, $A(N)$. En la Figura 4 se observan particiones y mediciones de algunos grupos.

Una vez obtenida el área, en cm^2, cada grupo comunica al profesor el valor que ha obtenido para $A(N)$. Por ejemplo, en una de las sesiones prácticas se consideró el Mayón para el cual se debía calcular el volumen correspondiente a la porción de dicho relieve desde la altura N=1000 hasta la cima, con N=2400. Así pues, los grupos de trabajo calcularon $A(N)$ para N =1000, 1200, 1400, 1600, 1800, 2000, 2200 y 2400. A medida que se obtiene el resultado, el grupo lo comunica al profesor, que los va anotando en la pizarra. Las anotaciones ordenadas permiten, por una parte, detectar errores de cálculo ya que se debe tener en cuenta que $A(1000) \geq A(1200) \geq ... \geq A(2400)$ y en el caso de grupos con el mismo nivel, los resultados, distintos, deben ser semejantes. Este último caso obliga, además, a tomar decisiones sobre qué valor considerar, por ejemplo la media aritmética. Conociendo todos estos valores, y teniendo en cuenta la escala del mapa, aplicando de nuevo el método de los trapecios para la integral del volumen $V = \int_{1000}^{2400} A(x)dx$, se obtenía el valor aproximado del volumen. Una vez rellenada la memoria, era adjuntada a la Tarea creada al efecto, para ser, finalmente, evaluada.

Figura 4. Midiendo sobre la curva de nivel N=680 del Mondúver; b) y c) Puig Campana y Mayón



4. RESULTADOS

A continuación describimos los resultados obtenidos por los grupos de estudiantes para el problema de Fermi, correspondiente al Monte Mayón y al Puig Campana en los cursos 2015-2016 y 2016-2017, y al Mondúver en el curso 2015-2016. En el primer caso el volumen a calcular venía determinado por $V = \int_{1000}^{2400} A(x)dx$. Considerando valores de x desde 1000 hasta 2400, de 200 en 200, y aplicando el método de los trapecios se tiene que

$$V = \int_{1000}^{2400} A(x)dx \approx \frac{h}{2}\big(A(1000) + 2A(1200) + 2A(1400) + ... + 2A(2200) + A(2400)\big),$$ por tanto, se

han de calcular las áreas $A(N)$ del segundo miembro. Como ejemplo del cálculo de una de ellas, para $A(1200)$ los comandos Matlab utilizados por uno de los grupos del curso 2015-2016 fueron:

x=0:1:19;

y=[0 7 11.5 14.5 17 17.5 18.2 19 19.5 19.5 19.2 19 18.7 18.3 17.4 15.7 14 11.5 8 0];

A_1200=trapz(x,y)

obteniéndose como resultado el valor de $A(1200)$= 285.5 cm^2. Para $A(1800)$, $A(2200)$ y $A(2400)$ se promediaron los resultados de dos grupos distintos (téngase en cuenta que a la hora de hacer la partición importa la orientación de la figura y los resultados no son siempre exactamente iguales, además tenemos los errores sistemáticos). Estos resultados de las secciones transversales, en cm^2, sirvieron para definir el vector global de áreas A:

A=[430.69, 285.5, 171, 118.17, 65.11, 27.8, 8.3, 0.35];

Por último, para calcular $V = \int_{1000}^{2400} A(x)dx$, en m^3, los valores del vector A deben pasarse a m^2. La escala gráfica del mapa indicaba que 4.5 cm equivalen a 500 m, así que se recalculó el vector global de áreas A en m^2 y, posteriormente, se definió el vector x de la variable independiente y se calculó la estimación V que ofrece el método de los trapecios con:

A=A*500^2/4.5^2; x=1000:200:2400; V=trapz(x,A)

siendo el resultado V= 2 201 000 000 m^3. Este fue el resultado obtenido en el curso 2015-2016. En el 2016-2017 el volumen estimado fue de 2 124 200 000 m^3.

Aunque durante la sesión práctica sólo se utilizó esta estimación, por la forma de este volcán, se pueden considerar otras como la de aproximar el relieve por un cono truncado o por la unión de varios conos. Para ello aproximamos cada curva de nivel por una circunferencia, obteniendo los radios de mayor a menor

R=[1300, 1077.8, 855.6, 677.8, 511.1, 344.4, 200, 44.4]

En el caso de un cono truncado (Figura 5a) de altura h=1400 metros, radio inferior (mayor) de r_M=1300 metros y superior (menor) de r_m=44.4, obtenemos la estimación V $V(h,r_M,r_m)$ = pi/3*h*($r_M^2+r_m^2+r_M*r_m$)= 2 565 200 000 m^3.

-En el caso de una unión de conos truncados (Figura 5b), teniendo en cuenta el vector de radios R y sumando los diferentes $V(h,r_M,r_m)$ con r_M y r_m consecutivos, se tiene la estimación V= 2 249 700 000 m3.

Para el problema del Puig Campana, se consideró la porción entre las alturas 900 y 1360 obteniendo en cm las siguientes áreas definidas en el vector A:

A=[359.55, 223.48, 140.49, 72, 21.5, 7.3];

Con la escala gráfica (4.9 cm son 200 m) se calcula el valor del volumen con:

A=A*40000/4.9^2;

x=[900,1000,1100,1200,1300,1360]; V=trapz(x,A)

siendo el valor de V= 105 810 000 m^3 en el curso 2015-2016. El resultado en el curso 2016-2017 fue de 108 550 000 m^3.

De forma similar, para el Mondúver, se consideró la porción comprendida entre las alturas 680 y 800 de 20 en 20 con una escala que indicaba que 6cm:200m. Los comandos pertinentes para el cálculo fueron:

A=[235.04, 181.3, 139.75, 92.2, 58.6, 28.7, 9.3]; A=A*40000^2/36;

x=680:20:800; V=trapz(x,A)

obteniendo el valor V= 13 840 000 m^3.

Figura 5. a) aproximación por un cono truncado. b) Aproximación con varios conos truncados

5. CONCLUSIONES

El Flipped Teaching es una metodología que nos ha permitido "dar la vuelta" a las prácticas de Matemáticas 2, pudiéndose aprovechar las clases presenciales para la realización de trabajos colaborativos en grupo. En particular, en la práctica de integración aproximada, la colaboración y trabajo de todos los grupos ha permitido obtener estimaciones de un problema de Fermi: el de calcular el volumen de una porción de un relieve. Por otra parte, constatamos que ha mejorado el rendimiento puesto que ha aumentado en un 2.5% los alumnos con nota mayor o igual a 5, además, la nota media de éstos ha aumentado en un punto. Entre los aspectos positivos que indican los estudiantes acerca de esta metodología, cabe resaltar su percepción de que la metodología Flip les ayuda a llevar la asignatura al día y que se aprende más y mejor. Entre los aspectos negativos destaca sobre todos los demás que seguir esta metodología les supone más trabajo.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha tenido el soporte de los PIMES: "Estudio sobre la aplicación del Flip Teaching en asignaturas de Matemáticas y Física" y "Puesta en marcha de diversas experiencias con el enfoque Flipped Teaching en asignaturas de Matemáticas y Física", de las convocatorias PIMEs 2015-2016 y 2016-2017 del Vicerrectorado de Estudios, Calidad y Acreditación de la Universitat Politècnica de València.

7. REFERENCIAS

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2011). *Una propuesta de modelización en secundaria: problemas de estimación de magnitudes no alcanzables*. Modelling in Science Education and Learning, 4, 71-81. doi:http://dx.doi.org/10.4995/msel.2011.3055

Albarracín, L. & Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de magnitudes no alcanzables: estrategias y éxito en la resolución. *PNA*, 7(3), 103-115.

Ärlebäack, J.B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331- 364.

Bergmann, J. & Sams, A. (2015). *Dale la vuelta a tu clase: Lleva tu clase a cada estudiante, en cualquier momento y cualquier lugar*. SM.

Carlson, J. E. (1997). Fermi problems on gasoline consumption. *The Physics Teacher*, 35(5), 308-309.

Efthimiou, C. J. & Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics Education*, *42*(3), 253-261.

Fidalgo-Blanco, A., Martinez-Nuñez, M., Borras-Gene, O., & Sanchez-Medina, J. J. (2017). "Micro flip teaching–An innovative model to promote the active involvement of students". *Computers in Human Behavior*, 72, 713-723.

Gannod G., Burge J. & Helmick M. (2008). Using the inverted classroom to teachsoftware engineering. *Proceedings of the International Conference on Software Engineering (ICSE),* 10-18.

García Navarro, J.M (2013). Problemas de Fermi. Suposición,estimación y aproximación. Épsilon, 30 (2), nº 84, 57-68, ISSN: 2340-714X.

Moravec M., Williams A., Aguilar-Roca N. & O'Dowd D.K. (2010). Learn before lecture: a strategy that improves learning outcomes in a large introductory biology clas. *CBE Life Sci Educ.,* 9, 473-481.

Paulos, J.A. (2000). *El hombre anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias.* Barcelona. Tusquets Editores, S.A

Poundstone, W. (2012). *Are You smart enough to work at Google?* Reino Unido: Oneworld.

Poundstone, W. (2007). *How would you move Mount Fuji*? Reino Unido: Time Warner Book Group.

Talbert, R. (2012a), Learning MATLAB in the Inverted Classroom Paper presented at 2012 ASEE Annual Conference & Exposition, San Antonio, Texas. https://peer.asee.org/21640.

Talbert, R. (2012b). Inverted Classroom. *Colleagues,* 9 (1) Article 7. Retrieved from http://scholarworks.gvsu.edu/colleagues/vol9/iss1/7

Talbert R. (2014). Inverting the Linear Algebra Classroom. *PRIMUS (Problems, Resources, and Issues. Mathematics Undergraduate Studies),* 24 (5), 361-374.