FICHA DE SERIES DE POTENCIAS

1. DATOS BÁSICOS DE LA ASIGNATURA

Nombre: Matemáticas I.
Código: 12396
Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación
Carácter: Formación básica.
Créditos: 7,5 --Teoría: 6,9 --Prácticas: 0,6

2. COMPETENCIAS TRANSVERSALES

(03): Análisis y resolución de problemas.
Actividades desarrolladas relacionadas con la adquisición de la competencia: Solución de un problema de enunciado complejo.
Descripción detallada de las actividades: Problemas y ejercicios integrados en el desarrollo de la asignatura.
Criterios de evaluación: Se hará de modo integrado con las actividades y evaluación del curso.

3. TEMA

Series de Potencias.

4. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Adquirir la noción de serie de potencias y sus propiedades fundamentales de convergencia.
- Calcular de forma efectiva el radio de convergencia de una Serie de Potencias.
- Aplicar las series de potencias al cálculo aproximado de integrales definidas.
- Identificar el desarrollo en serie de potencias de algunas de las funciones fundamentales en cálculo: trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc.

5. ACTIVIDAD FLIP

- En un primer paso, el alumno debe, previo a la explicación del profesor, hacer un estudio de esta unidad mediante el material en recursos de la asignatura, indicado y dejado por el profesor. Este material consistirá en apuntes, videos polimedia, objetos de aprendizaje, entre otros, de forma que el alumno haga un análisis de la unidad previo a la explicación del tema. Con esto se pretende que el alumno haga una reflexión sobre su conocimiento y también de sus carencias para enfrentarse al tema en cuestión.

- En un segundo paso, cuando el profesor haya terminado la explicación, el alumno deberá realizar los ejercicios propuestos por éste. De esta forma el alumno podrá comprobar si ha estudiado suficiente y comprendido bien los conceptos del tema. Todos los ejercicios serán publicados con su correspondiente solución. El profesor indicará una posible resolución de estos. Finalmente, el profesor corregirá algunos ejercicios y también se consultarán las dudas pertinentes.

6. RECURSOS Y DESCRIPCIÓN

Bibliografía recomendada:

1. Tema 11 de “Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas”. Séptima Edición, James Stewart.

Se detalla a continuación los recursos ***polimedia*** correspondientes al tema de series de potencias.

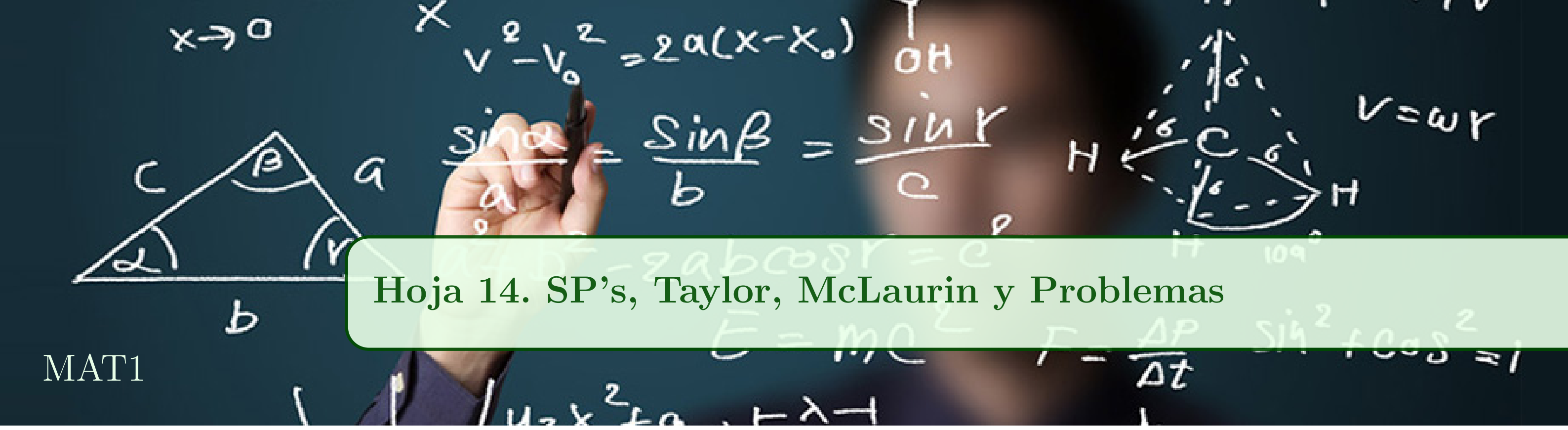
Desarrollos en serie de potencias
Propiedades de las series de potencias
Aplicaciones de los desarrollos en serie de potencias
Series de Potencias: radios de convergencia

7. EVALUACIÓN

Control en aula de destrezas adquiridas y examen de respuesta abierta junto a otros temas.

EJERCICIO PRÁCTICO

SERIES DE POTENCIAS



MAT1

Hoja 14. SP's, Taylor, McLaurin y Problemas

E1. Determina el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las series

1.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$

2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

3.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

4.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

5.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x^n}{2\cdot 4\cdots(2n)}$

R2. Si tras este ejercicio crees que deberías practicar más el cálculo de radios e intervalos de convergencia, puedes hacer los ejercicios 3 a 28 de la sección 11.8 del Stewart (páginas 745–746).

E3. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge para $x=-4$ y diverge cuando $x=6$. ¿Qué puedes decir con respecto a la convergencia o divergencia de las siguientes series?

1.- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n$

2.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

3.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n$

4.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

P4. Supongamos que el radio de convergencia de la serie $\sum c_n x^n$ es 2 y que el radio de convergencia de la serie $\sum d_n x^n$ es 3. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie $\sum (c_n+d_n)x^n$?

P5. Supongamos que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum c_n x^n$ es R. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum c_n x^{2n}$?

E6. Encuentra una representación como serie de potencias para la función siguiente y determina el intervalo de convergencia de dicha serie.

$$f(x) = \frac{2}{3-x}$$

E7. Encuentra una representación como serie de potencias para la función siguiente y determina el intervalo de convergencia de dicha serie.

$$f(x) = \frac{x}{2x^2+1}$$

E8. Encuentra la serie de Taylor para f con centro en 4 si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor?

E9. Calcula la serie de Taylor para $f(x) = \ln x$ centrada en $a = 2$. Calcula el radio de convergencia de dicha serie y el intervalo de convergencia.

E10. Mediante las series de McLaurin evalúa los siguientes límites:

1.- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

2.- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{1+x-e^x}$

3.- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

P11. Si $f(x) = \operatorname{sen}(x^3)$, encuentra $f^{(15)}(0)$.

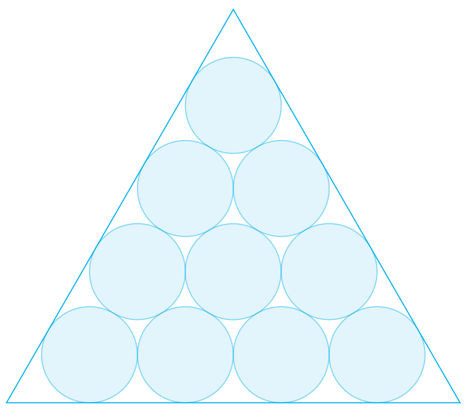
P12. Una función f está definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$$

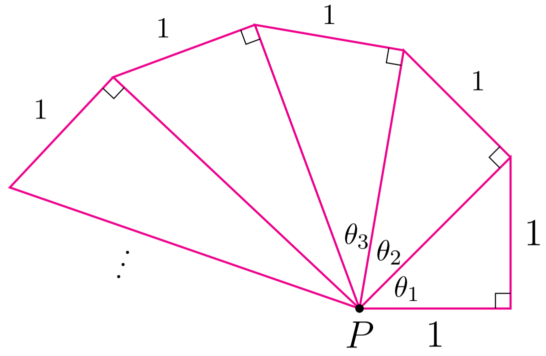
¿Dónde es continua f? En caso de que f presente algunas discontinuidades, ¿son éstas de tipo evitable?¿Hay continuidad por la derecha o por la izquierda en esos puntos?

P13. Supongamos que dentro de un triángulo equilátero se acomodan círculos de igual diámetro en n filas. La figura ilustra el caso $n = 4$. Si A es el área del triángulo y A_n es el área total ocupada por las n filas de círculos, demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$



P14. Se trazan triángulos rectángulos como en la figura. Cada uno de los triángulos tiene una altura de 1 y su base es la hipotenusa del triángulo precedente. Demuestra que esta sucesión de triángulos da una cantidad indefinida de vueltas alrededor de P mostrando que $\sum \theta_n$ es una serie divergente.



Soluciones

E1. 1.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$; Radio $R = 1$, centro $a = 0$ e intervalo $I = [-1, 1)$.

2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; Radio $R = \infty$, centro $a = 0$ e intervalo $I = (-\infty, \infty)$.

3.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$; Radio $R = 1$, centro $a = 2$ e intervalo $I = [1, 3]$.

4.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$; Radio $R = 0$, centro $a = 1/2$ e intervalo $I = \{1/2\}$.

5.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$; Radio $R = \infty$, centro $a = 0$ e intervalo $I = \mathbb{R}$.

E3. Sólo podemos saber que $4 \leq R \leq 6$ y así:

1.- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n$; Converge, para $x = 1$.

2.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$; Diverge, para $x = 8$.

3.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n$; Converge, para $x = -3$.

4.- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$; Diverge, para $x = 9$.

P4. El radio de convergencia es $R = 2$.

P5. El radio de convergencia es $\sqrt{R}$.

E6. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{x}{3}\right)^n$ para $x \in (-3, 3)$.

E7. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^{2n+1}$ para $x \in (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

E8. La serie que tiene $R = 3$ es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(n+1)} (x-4)^n.$$

E9.

$$f(x) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n} (x-2)^n.$$

E10. 1.- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = 1/2.$

2.- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{1+x-e^x} = -1.$

3.- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \frac{1}{120}.$

P11. $f^{(15)}(0) = 15!/5!.$

P12. La función es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Tanto en $x = -1$ como en $x = 1$ hay una discontinuidad no evitable de salto.

P13. Quizás te sea de ayuda calcular primero el número de círculos en el triángulo para cada n, que son $n(n+1)/2$.

P14. La sucesión de ángulos viene dada por $\theta_n = \arctan(1/\sqrt{n})$. Por comparación con la serie $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ se comprueban que ambas tienen el mismo caracter de convergencia. Como esta serie es una armónica generalizada con $p = 1/2$, la serie diverge, es decir $\sum_n \theta_n = +\infty$