FICHA DE SERIES NUMÉRICAS

1. DATOS BÁSICOS DE LA ASIGNATURA

Nombre: Matemáticas I.
Código: 12396
Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación
Carácter: Formación básica.
Créditos: 7,5 --Teoría: 6,9 --Prácticas: 0,6

2. COMPETENCIAS TRANSVERSALES

(03): Análisis y resolución de problemas.
Actividades desarrolladas relacionadas con la adquisición de la competencia: Solución de un problema de enunciado complejo.
Descripción detallada de las actividades: Problemas y ejercicios integrados en el desarrollo de la asignatura.
Criterios de evaluación: Se hará de modo integrado con las actividades y evaluación del curso.

3. TEMA

Series Numéricas.

4. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Adquirir la noción de serie numérica.
- Reconocer las series geométricas y telescópicas, así como establecer su carácter de convergencia y su suma (en el caso convergente)
- Manejar con soltura los criterios de convergencia para series de términos positivos.

5. ACTIVIDAD FLIP

- En un primer paso, el alumno debe, previo a la explicación del profesor, hacer un estudio de esta unidad mediante el material en recursos de la asignatura, indicado y dejado por el profesor. Este material consistirá en apuntes, videos polimedia, objetos de aprendizaje, entre otros, de forma que el alumno haga un análisis de la unidad previo a la explicación del tema. Con esto se pretende que el alumno haga una reflexión sobre su conocimiento y también de sus carencias para enfrentarse al tema en cuestión.

- En un segundo paso, cuando el profesor haya terminado la explicación, el alumno deberá realizar los ejercicios propuestos por éste. De esta forma el alumno podrá comprobar si ha estudiado suficiente y comprendido bien los conceptos del tema. Todos los ejercicios serán publicados con su correspondiente solución. El profesor indicará una posible resolución de estos. Finalmente, el profesor corregirá algunos ejercicios y también se consultarán las dudas pertinentes.

6. RECURSOS Y DESCRIPCIÓN

Bibliografía recomendada:

1. Tema 11 de “Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas”. Séptima Edición, James Stewart.

Se detalla a continuación los recursos ***polimedia*** correspondientes al tema de series numéricas.

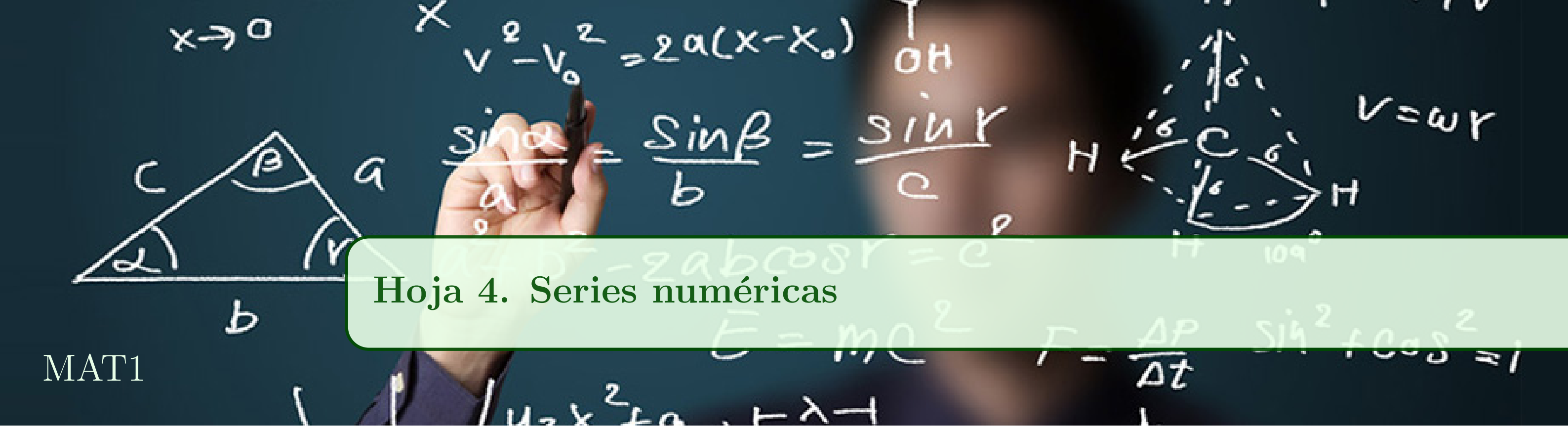
Definición formal de serie numérica
Series armónicas y geométricas
Series telescópicas
Protocolo a seguir para analizar el carácter de una serie numérica

7. EVALUACIÓN

Control en aula de destrezas adquiridas y examen de respuesta abierta junto a otros temas.

EJERCICIO PRÁCTICO

SERIES DE POTENCIAS



Hoja 4. Series numéricas

MAT1

E1. Calcula la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si la sucesión de sus sumas parciales viene dada por $s_n = (n^2-1)/(4n^2+1)$.

E2. Considera la sucesión dada por $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$. Determina si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente. Determina si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

E3. De las siguientes series geométricas, determina si convergen o no y, en su caso, determina la suma.

1.- $3 - 4 + \dfrac{16}{3} - \dfrac{64}{9} + \cdots$

2.- $4 + 3 + \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{16} + \cdots$

3.- $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \cdots$

4.- $2 + 0.5 + 0.125 + 0.03125 + \cdots$

5.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

6.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

E4. Determina si las siguientes series son convergentes o divergentes. En su caso, encuentra su suma.

1.- $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{12} + \cdots$

2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$

3.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$

4.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

5.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$

E5. Determina si la serie es convergente o divergente al expresar s_n como suma telescópica. Si es convergente, encuentra su suma:

1.- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

3.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

4.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - e^{1/(n+1)}\right)$

E6. Expresa los números siguientes como números fraccionarios.

1.- $0.\widehat{8} = 0.8888\ldots.$

2.- $0.\widehat{46} = 0.464646\ldots$

3.- $10.1\widehat{35}$

4.- $7.\widehat{12345}$

E7. Calcula los valores de x para los que las siguientes series convergen. Determina la suma para esos valores.

1.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^n x^n$

2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n}$

3.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^n(x)}{3^n}$

4.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{nx}$

P8. Sea $x = 0.999\ldots.$ ¿Crees que $x < 1$ o que $x = 1$? Suma una serie geométrica para determinar su valor. ¿Qué números reales poseen más de una representación decimal?

P9. Hemos visto que una serie armónica es una serie divergente cuyos términos se aproximan a 0. Demuestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

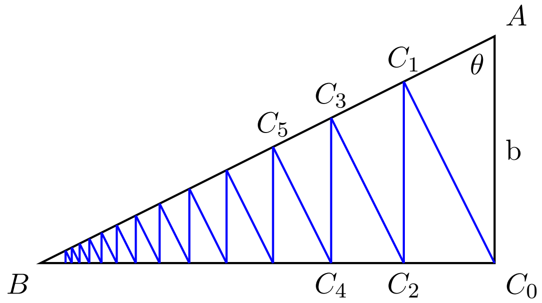
es otra serie con la misma propiedad.

P10. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$

determina $\{a_n\}$ y el valor de la suma de la serie.

P11. Consideremos el triángulo rectángulo de la imagen ABC_0. Se traza un segmento C_1C_0 perpendicular a AB y después C_2C_1 perpendicular a BC_0. Así sucesivamente se van construyendo los segmentos C_nC_{n-1} de longitud ℓ_n.



Determina la suma de longitudes de tales segmentos

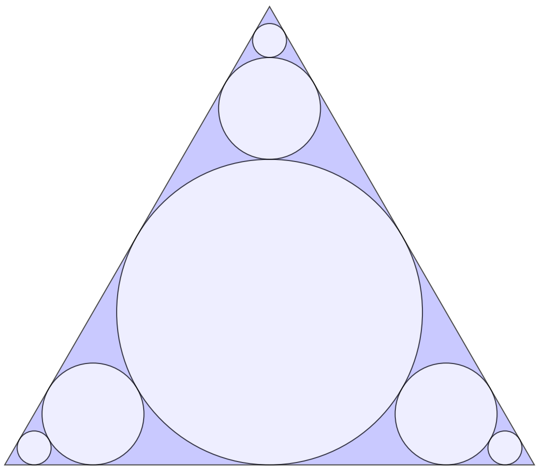
$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n = |C_1C_0| + |C_2C_1| + |C_3C_2| + \cdots$$

en términos de b y θ.

P12. Encuentra el valor de c para que se cumpla que $\sum_{n=2}^{\infty}(1+c)^{-n} = 2$.

P13. Supón que una serie $\sum a_n$ consta de términos positivos y sus sumas parciales s_n cumplen la desigualdad $s_n \leq 1000$ para toda n. Explica por qué la serie debe ser convergente.

P14. En la figura hay una cantidad infinita de círculos que se aproximan a los vértices de un triángulo equilátero. Cada círculo toca otros círculos y los lados del triángulo. Si el triángulo tiene lados que miden una unidad, calcula el área total que ocupan los círculos.



R15. La sección del Stewart dedicada a las series es la 11.2 (Páginas 703–710). Los ejercicios de dicha sección pueden ayudarte a asentar conocimientos y desarrollar adecuadamente tu competencia:

- 1 al 16; ejercicios básicos de series (página 711).
- 17 al 26, 57 al 63; ejercicios sobre series geométricas (páginas 711 y 712).
- 27 al 42; ejercicios sobre convergencia de series (página 711).
- 43 al 48; ejercicios sobre series telescópicas (página 711).
- 49 al 56; ejercicios sobre desarrollo decimal (página 712)
- 64 al 90; problemas sobre series (páginas 712–714).

Soluciones

E1. La suma es $\frac{1}{4}$.

E2. La sucesión a_n converge, pero como lo hace a $2/3 \neq 0$, la serie diverge.

E3. De las siguientes series geométricas, determina si convergen o no y, en su caso, determina la suma.

1.- $3 - 4 + \dfrac{16}{3} - \dfrac{64}{9} + \cdots$; Diverge, es geométrica de razón $-4/3$.

2.- $4 + 3 + \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{16} + \cdots$; Geométrica de razón $3/4$, suma 16.

3.- $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \cdots$; Geométrica de razón $-1/5$, suma $25/3$.

4.- $2 + 0.5 + 0.125 + 0.03125 + \cdots$; Geométrica de razón $1/4$, suma $8/3$.

5.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$; Geométrica de razón $-3/4$, suma $1/7$.

6.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$; Geométrica de razón $\pi/3$, diverge.

E4. Determina si las siguientes series son convergentes o divergentes. En su caso, encuentra su suma.

1.- $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{12} + \cdots$; Diverge, es un múltiplo de la armónica.

2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$; Diverge, el término general no tiende a cero.

3.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$; Converge. Suma de dos geométricas, suma $5/2$.

4.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$; Diverge, el término general no tiende a cero.

5.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$; Diverge, al ser suma de una convergente y una divergente.

E5. Determina si la serie es convergente o divergente al expresar s_n como suma telescópica. Si es convergente, encuentra su suma:

1.- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$; Telescópica, converge, suma $3/2$.

2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$; Telescópica, diverge.

3.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$; Telescópica, converge, suma $11/6$.

4.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - e^{1/(n+1)}\right)$; Telescópica, converge, suma $e-1$.

E6. Expresa los números siguientes como números fraccionarios.

1.- $0.\widehat{8} = 0.8888\cdots = 8/9$.

2.- $0.\widehat{46} = 0.464646\cdots = 46/99$.

3.- $10.1\widehat{35} = 5017/495$.

4.- $7.\widehat{12345} = 237446/33333$.

E7. Calcula los valores de x para los que las siguientes series convergen. Determina la suma para esos valores.

1.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^n x^n$; $x \in (-1/5, 1/5)$ y suma $(-5x)/(1+5x)$.

2.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$; $x \in (-1, 5)$ y suma $(x-2)/(5-x)$.

3.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^n(x)}{3^n}$; $x \in \mathbb{R}$ y suma $\sin(x)/(3-\sin(x))$.

4.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$; $x < 0$ y suma $e^x/(1-e^x)$.

P8. Piensa un poco.

P9. Es una serie telescópica.

P10. $a_n = 2/(n(n+1))$ y su suma es 1.

P11. $L = b\frac{\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}$.

P12. $c = (-1+\sqrt{3})/2$.

P13. Piensa un poco.

P14. $A = 11\pi/96$.